

# VYUŽITÍ VARIÁČNÍ GEOMETRIE VE VÝUCE NA TECHNICKÝCH FAKULTÁCH

Jaromír Dobrý<sup>1</sup> a Miroslav Lávička<sup>2</sup>

## Abstrakt:

V článku je diskutováno zařazení variační geometrie do výuky na technických fakultách Západočeské univerzity (ZČU) v Plzni. Využití programu Cabri do výuky na základních a středních školách je dnes již poměrně běžné, ukazuje se však, že tento software je vhodný i pro školy vysoké. Příspěvek dále prezentuje jeden příklad tak, jak bývá probírán na konkrétních cvičeních předmětů Geometrie pro FST 1, 2. Program Cabri je úspěšně doplněn programem 3D Geometrie, jenž slouží k nácvičku algoritmizace konstrukcí a částečně tak nahrazuje klasický náčrtek. Navíc je zde zmíněna i možnost praktického využití tisku z programu Cabri.

## 1 Úvodem

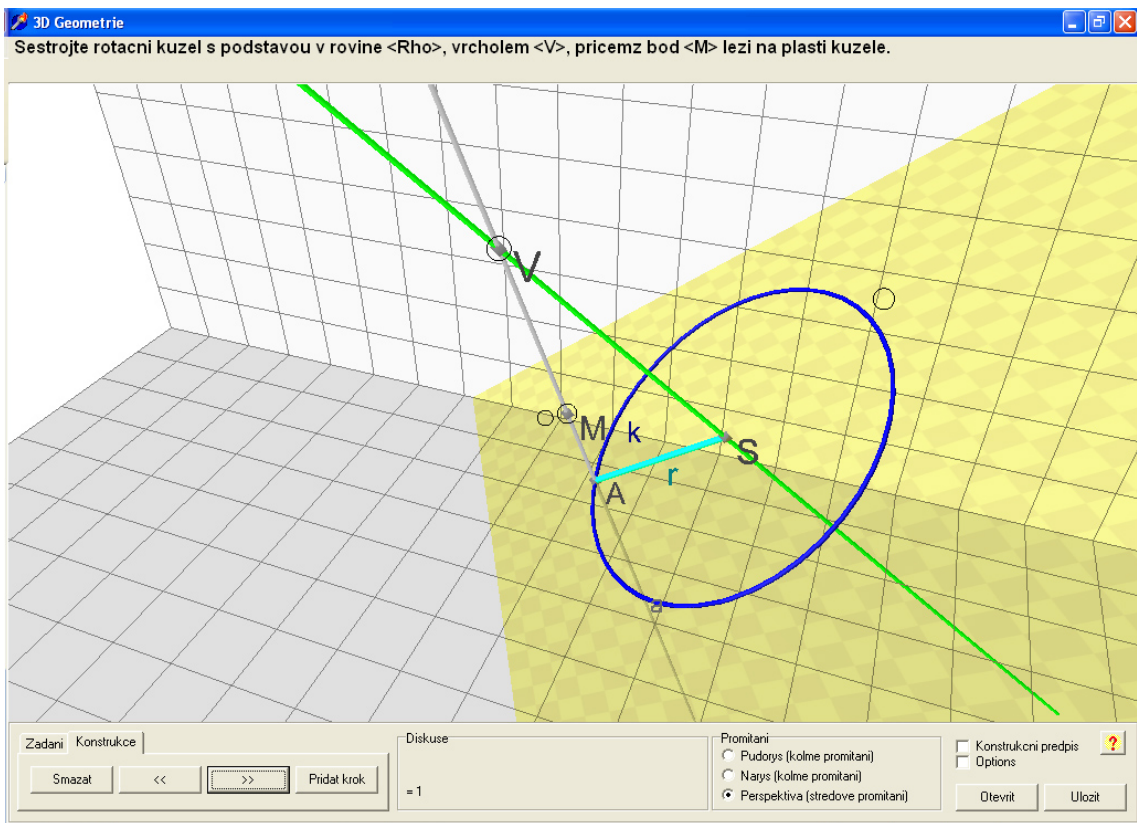
Tak jako na řadě ostatních vysokých školách, proběhlo v uplynulých letech na Západočeské univerzitě v Plzni významné zvýšení podílu elektronické podpory výuky geometrických předmětů, u nichž buďto došlo ke snížení kontaktních hodin, anebo jejichž elektronickou podporu si vyžádalo zařazení do učebních plánů studentů kombinovaného (distančního) studia. Na serveru oddělení geometrie katedry matematiky FAV ZČU v Plzni (<http://geometrie.kma.zcu.cz>) lze nalézt elektronickou podporu téměř všech předmětů geometrického kurikula nabízených studentům Fakulty aplikovaných věd, Fakulty pedagogické, Fakulty strojní a Ústavu umění a designu — hlavní náplň se nachází v sekci *Materiály pro studenty a Zajímavé odkazy*. Jako příklad modernizace výuky uvedeme v tomto článku zařazení počítače do standardního kurzu geometrie na Fakultě strojní — předměty *Geometrie pro FST 1* a *Geometrie pro FST 2* (podrobné sylaby na <http://stag.zcu.cz>).

## 2 Variační geometrie aneb geometrie v pohybu

Programy jako Cabri, Sketchpad či Cinderella představují produkty dynamické *planimetrie* a nejsou tedy primárně určené pro modelování konstrukcí v trojrozměrném prostoru. Pochopitelně i zde můžeme bez problémů aplikovat známé metody deskriptivní geometrie a provádět stereometrické konstrukce s využitím průmětů. Pro hlavní nevýhodu takového postupu však nemusíme chodit příliš daleko. Přestože řešení v průmětech je matematicky přesné a konstrukce např. v Mongeově projekci jsou relativně jednoduché, velmi zde chybí názornost, což studentům činí značné obtíže. Výuku je třeba doplňovat kreslením obrázků, ukazováním modelů apod. Jako jedna z možností byl vyvinut program *3D Geometrie*, který bude podrobně rozebrán v kapitole 4. Celý proces výuky ukážeme na jednoduché úloze deskriptivní geometrie.

<sup>1</sup>Západočeská univerzita, Univerzitní 22, Plzeň, [dobry@kma.zcu.cz](mailto:dobry@kma.zcu.cz)

<sup>2</sup>Západočeská univerzita, Univerzitní 22, Plzeň, [lavicka@kma.zcu.cz](mailto:lavicka@kma.zcu.cz)



Obrázek 1: Konstrukce v programu 3D Geometrie

### 3 Úloha

**Zadání.** V prostoru jsou dány body  $V$ ,  $M$  a rovina  $\varrho$ . Sestrojte rotační kužel s podstavou v rovině  $\varrho$  a vrcholem  $V$ , tak aby bod  $M$  ležel na plášti kužele.

**Princip řešení.** Osa kužele  $o$  je kolmá na rovinu podstavy  $\varrho$  a prochází vrcholem kužele  $V$ . Střed podstavy  $S$  je pak průsečík  $o$  s rovinou podstavy  $\varrho$ . Dále bod  $M$  leží na plášti kužele, přímka  $a = VM$  je tedy povrchka kužele. Bod  $A \in a \cap \varrho$  je bod podstavné hrany kužele. Dále stačí jen určit vzdálenost bodů  $A$ ,  $M$  a sestrojit podstavu (zobrazení kružnice), konstrukci kužele pak již snadno dokončíme.

### 4 3D Geometrie

Jak jsme již zmínili, použitím průmětů se v řadě případů zakrývá skutečná myšlenka postupu řešením dílčích problémů zobrazovacích metod. Je tedy vhodné pro potřeby výuky deskriptivní geometrie najít nástroj, který by umožnil přehledně zpracovávat prostorové konstrukce pro potřeby rozboru úlohy. Přestože existuje varianta Cabri 3D, bylo rozhodnuto, že pro naše účely bude nejlepší vytvořit zcela novou aplikaci nazvanou *3D Geometrie*. Základními požadavky na program 3D Geometrie byly:

**Jednoduchost ovládání** – Co nejméně ovládacích prvků, pokud možno jasný význam. Student se nemá učit specializovaný software, ale pochopit problém.

**Přehlednost zobrazení** – Program má sloužit k pochopení problému, je tedy třeba se zamyslet nad tím, aby konstrukce byla zobrazena co nejprehledněji. Je také bezpodmínečně nutné, aby konstrukci bylo možné krokovat, podobně jako je tomu v Cabri.

**1:1 se základními úlohami Mongeovy projekce** – Pokud má program sloužit k nácviku algoritmizace, je nutné, aby si student zvykl na fakt, že má k dispozici určitou omezenou množinu konstrukcí, které smí použít k řešení problému. Pouze tato omezená množina je mu zpřístupněna. Tak se snažíme docílit toho, aby student nevymýšlel postupy, které jsou založeny pouze na jeho, často chybné, intuici.

**Variační geometrie** – Možnost měnit zadání a sledovat, jak se v důsledku těchto změn bude chovat celá konstrukce. Tato vlastnost je klíčová pro to, aby student mohl okamžitě zavrhnout nesmyslný postup, který náhodou funguje pro jednu konfiguraci zadání, ale obecně ne. Zkracuje se tím doba, za kterou se dozví, že udělal chybu. Dříve se tento fakt student měl šanci dozvědět až na konzultaci, v horším případě dokonce až u zkoušky.

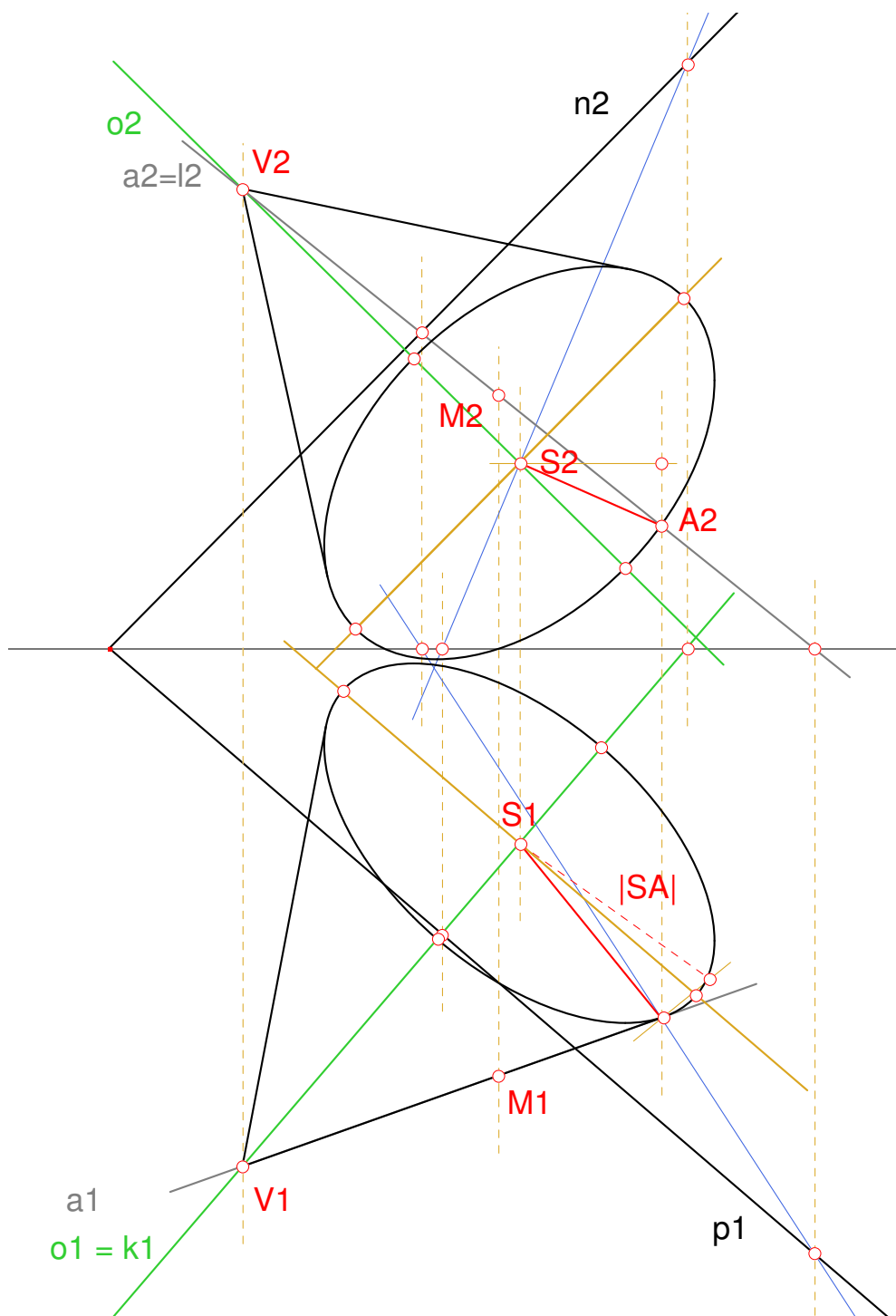
Řešením se tedy zdá být jednoduchá aplikace, která zobrazí konstrukci přímo ve 3D, např. v perspektivní projekci, jež byla zvolena z důvodu její názornosti. Nutností je pochopitelně možnost pohybovat kamerou, dále též možnost měnit zadání úlohy, čímž uspokojíme požadavek variační geometrie. Nejsou potřeba žádné numerické vstupy, které by v tomto případě pouze zvyšovaly počet ovládacích prvků. Krokování konstrukce bude prováděno dvěma tlačítky (dopředu, zpět) tak, jak očekáváme. Vše se tedy orientuje na jednoduchost použití.

Vlastní konstrukci je možné v programu 3D Geometrie editovat jako posloupnost kroků, přičemž každý krok má několik vstupů a výsledek. Výsledek pak může být vstupem do jiného kroku konstrukce. Takto je vytvořen jednoduchý objektový model konstrukce. Do budoucna se počítá s určitými rozšířeními např. možnost bodové konstrukce, apod. Řešení ukázkové úlohy vidíme na obrázku 1.

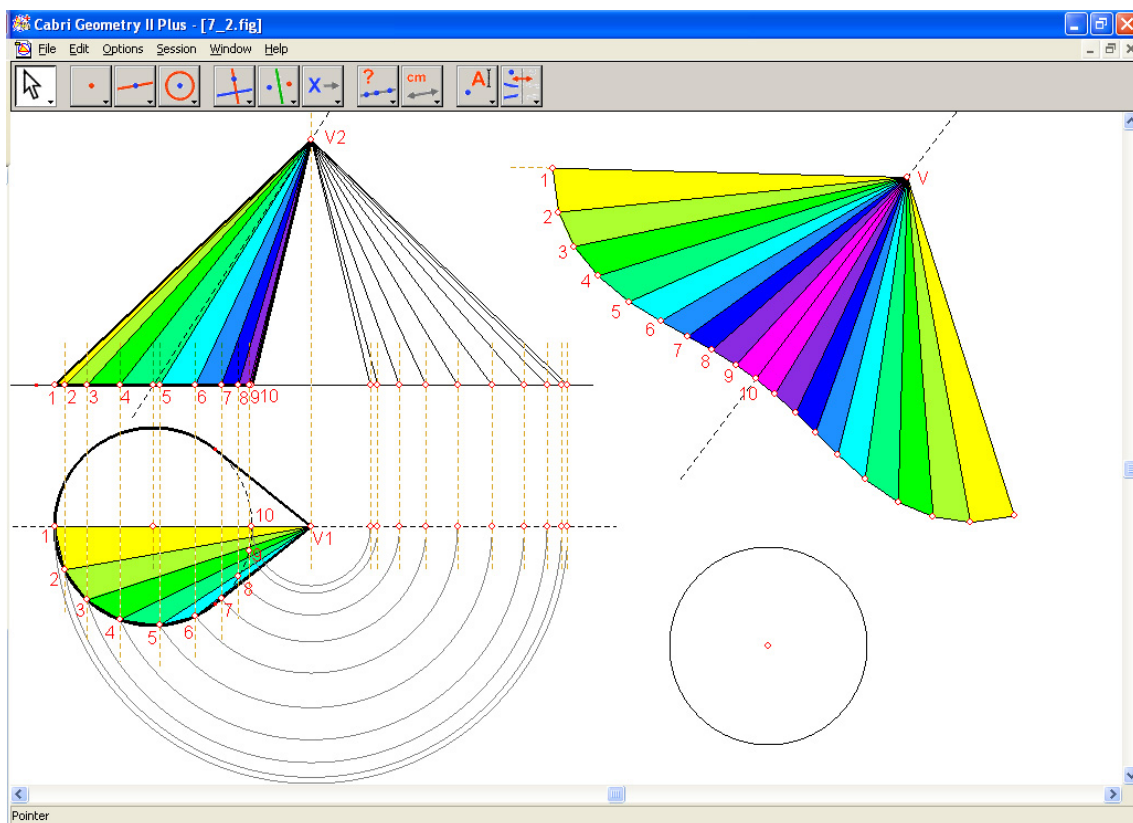
## 5 Cabri — návrat do roviny

Výsledkem použití programu 3D Geometrie by mělo být vyudování představy prostorové situace a pochopení postupu konstrukce. Tento postup je pak univerzálně použitelný, ať již řešíme úlohu prostředky deskriptivní či analytické geometrie. Pokud má být cílem řešení úlohy v průmětech, můžeme úlohu zpracovat např. v Cabri jako v dnes již standardním nástroji dynamické planimetrie. Oproti klasické tabuli má zpracování v Cabri mnoho dnes již obecně známých výhod, z kterých snad jen připomeneme zejména možnost použití různých barev a stylů čar, což konstrukci velmi zpřehlední, a dále možnost úlohu předem připravit a docílit tak lepší účinnosti — vyhneme se např. nepřehledným situacím, kdy student letmým pohledem na tabuli špatně pochopí postup a chybu pak zaručeně zopakuje v nejméně vhodné chvíli, tedy u zkoušky.

Výhoda postupného použití nejprve programu 3D Geometrie a následně Cabri se projeví nejvíce u složitějších úloh. Nejprve ukážeme obecný, snadno pochopitelný postup, technickým detailům konstrukce v průmětech se věnujeme až v druhé části



Obrázek 2: Konstrukce v programu Cabri II Plus



Obrázek 3: Rozvinutí v Cabri II Plus

výkladu. Oddělíme tak obecně platné poznatky od zvláštností použité projekce. Naši ukázkovou úlohu vidíme zpracovanou v Mongeově projekci programem Cabri na obr. 2. Pochopitelně zde využíváme možnost krokování konstrukce, a to nejen dopředu, ale při nejasnostech se můžeme k problematickému kroku vrátit a vše v klidu objasnit bez improvizovaných prostředků, jako je zakrývání částí konstrukce nebo dokonce mazání, což situaci ve výsledku jen zhoršuje.

## 6 Tisk z Cabri aneb když si matematik hraje s nůžkami

Na závěr si ukážeme ještě jeden, a to poněkud kuriózní způsob využití Cabri, který však můžeme velmi elegantně použít k procvičení tématu rozvinutelných ploch. Přestože zde nejde o skutečné využití variační geometrie, dle našeho názoru tento postup stojí za pozornost. Budeme řešit úlohu sestrojení rozvinutí určité plochy, k čemuž můžeme použít klasické metody, jakou je triangulace nebo metoda normálového řezu, a to úplně stejně jako na tabuli nebo do papírových předtisků.

Vzhledem k tomu, že rozvinutí sestrojené pomocí Cabri není o nic méně hodnotné než rozvinutí sestrojené jakýmkoli jiným způsobem, nic nám nebrání tuto vyřešenou úlohu z Cabri vytisknout na kladívkovou čtvrtku a sestrojít model. Důležité je, že pokud máme úlohu již vyřešenou, nepřidáváme již téměř žádnou práci navíc, nemusíme dále už nic měřit, stačí sestrojenou síť vystřihnout a slepit. Pokud použijeme barevnou tiskárnu a konstrukci obarvíme, dosáhneme tak vizuálně velmi

přitažlivých pomůcek, jejichž použití při výuce snad ani není třeba obhajovat, zvláště pokud na těchto pomůckách ukazujeme přímo úlohu, která vedla k jejich sestrojení a kterou současně řešíme i v Cabri. Studenti tak velmi přesvědčivě vidí, že postup, který jim ukazujeme lze skutečně použít v praxi. Jak vypadá sestrojení rozvinutí kosého kužele v Cabri, vidíme na obr. 3. Jako perličku pak můžeme pro zajímavost tyto vystřihovánky ve formátu \*.pdf umístit ke stažení na webovské stránky předmětu.

## 7 Závěr

V dnešní době se klade stále větší důraz na rozvoj a upevňování prostorové představivosti a tvůrčího myšlení studentů a absolventů vysokých škol. Tato situace úzce souvisí se vstupními předpoklady, které se formují již na středních a základních školách. Problémem však je, že zatímco výstupní požadavky na znalosti vysokškolských studentů matematických a technických disciplín se stále stupňují, vstupní předpoklady díky redukci učiva geometrie a deskriptivní geometrie na středních školách silně zaostávají.

Použití variační geometrie v základních geometrických kurzech na technických fakultách přináší nové možnosti v pojetí těchto předmětů a umožňuje studentům lépe zvládnout geometrické učivo, které je pro ně poměrně obtížné. Současné zařazení dvou programů variační geometrie (Cabri a Geometrie 3D) jednak zdůrazňuje vlastní algoritmické řešení stereometrických úloh nezávisle na zobrazovací metodě, ale na druhé straně neopomíná ani standardní metody klasické deskriptivní geometrie. Hlavním smyslem uváděné modernizace je tedy změna v přístupu — student se nepotýká s vlastním technickým provedením konstrukce, ale opravdu řeší zadaný problém. Navíc je patrné, že student je lépe připraven řešit reálné úlohy v geometrických 3D modelářích (např. CATIA, Rhinoceros apod.), neboť již od počátku je zvyklý pohybovat se v 3D světě a ne jen ve světě půdorysu a nárýsu. Ohlasy ze studentských anket, které se na Západočeské univerzitě konají pravidelně po skončení každého semestru, ukazují, že navržený způsob výuky je studenty vítán a i pohled ze strany vyučujících ukazuje na fakt, že studenti chápou předkládanou problematiku lépe.

## Literatura

- [1] <http://geometrie.kma.zcu.cz/index.php/www/content/view/full/210/>
- [2] <http://geometrie.kma.zcu.cz/index.php/www/content/view/full/67/>
- [3] VRBA, A. Oživlá geometrie. *Matematika, fyzika, informatika*. 2000, č. 2 a 3.
- [4] ŠTAUBEROVÁ, Z. *Axonometrie, křivky, plochy*. Plzeň: ZČU v Plzni, 2006.