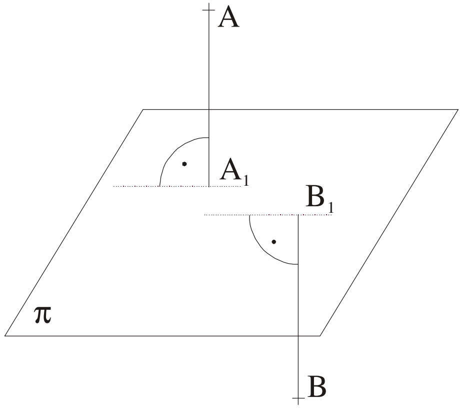
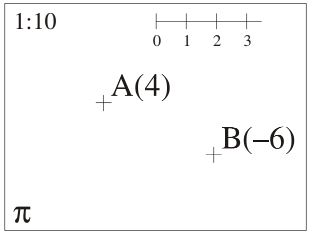
Kótované promítání

pravoúhlé promítání na jednu průmětnu





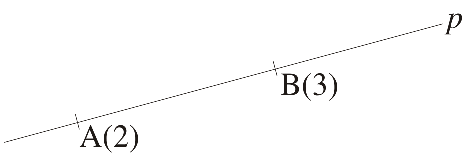
Kóta
– orientovaná vzdálenost bodu od průmětny

Měřítko
– graficky nebo číselně, udává poměr zkrácení

Souřadnicový systém
– průmětna π je rovina *xy*
– kóta – *z*-ová souřadnice bodu

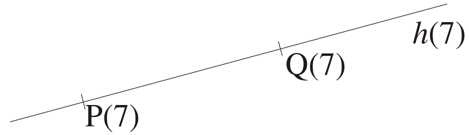
Zobrazení přímky a úsečky

– průmětem přímky je přímka nebo bod

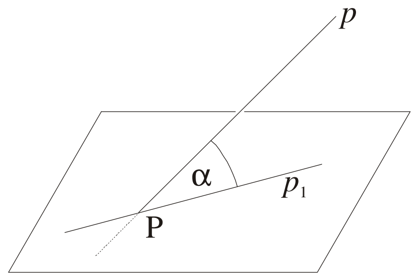


+*q* = A(2) = B(3)
(přímka *q* je kolmá na π)

– přímka rovnoběžná s průmětnou – všechny body mají stejnou kótu

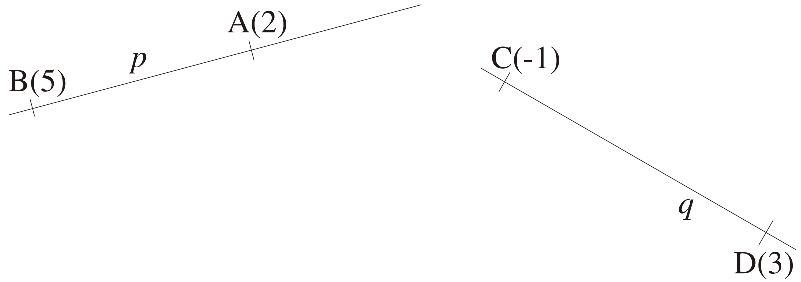


– stopník – bod, ve kterém přímka protíná průmětnu



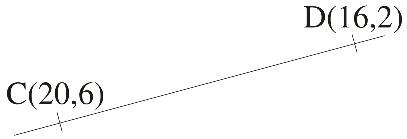
P – stopník
α – odchylka přímky od průmětny

Úloha 1:
Určete skutečnou velikost úseček AB a CD, stopník přímek *p* = AB a *q* = CD a odchylku těchto přímek od průmětny.



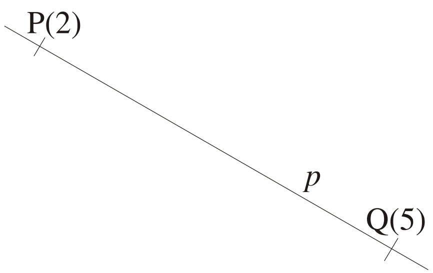
Úloha 2:

Sestrojte skutečnou velikost úsečky CD.



Úloha 3:

Najděte na přímce p = PQ bod R, který má kótu $z_R = 3$.



Vrstevní roviny

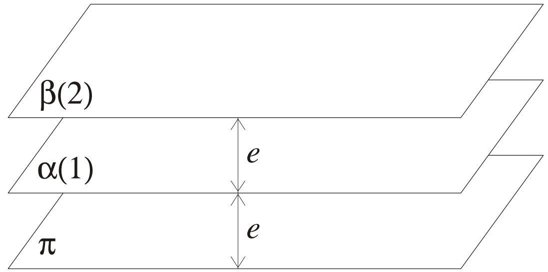
– roviny rovnoběžné s průmětnou

Hlavní vrstevní roviny

– vrstevní roviny s celočíselnými kótami

Ekvidistance *e*

– vzdálenost dvou sousedních hlavních vrstevních rovin

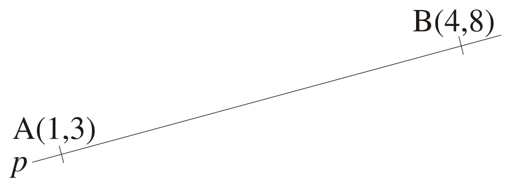


Stupňování přímky

– sestrojení bodů s celočíselnými kótami (jsou to vlastně průsečíky přímky a hlavních vrstevních rovin)

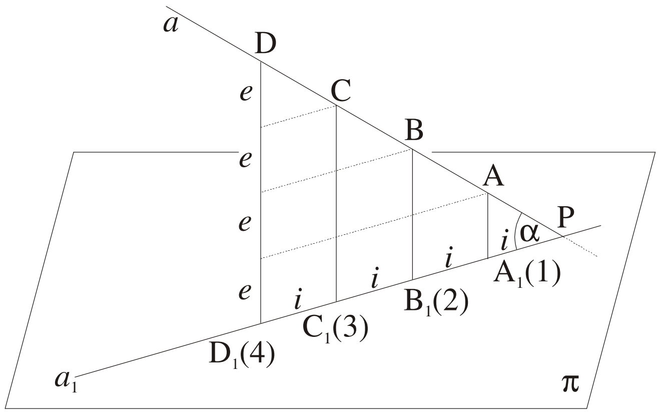
Úloha 4:

Vystupňujte přímku p = AB.

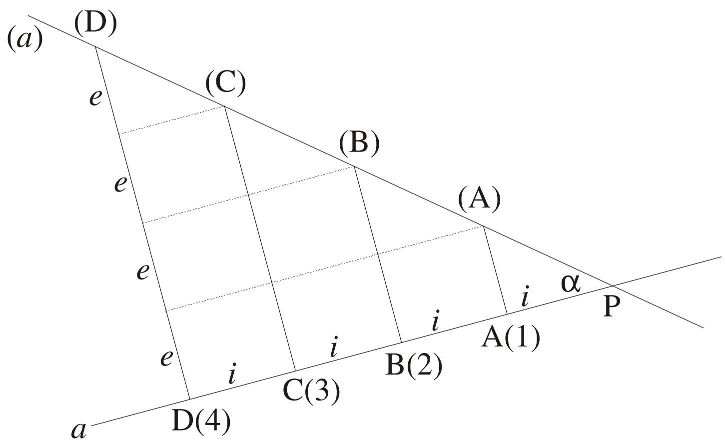


Interval *i* přímky *p*
– vzdálenost průmětů dvou bodů na přímce *p*, jejichž kóty se liší o jednotku měřítka

Spád *s* přímky *p*



$s = e{:}i = \mathrm{tg}\alpha$
e – ekvidistance
i – interval
α – odchylka přímky od průmětny



Zobrazení roviny

– průmětem roviny ρ je celá průmětna nebo přímka (pokud je rovina ρ kolmá na průmětnu)
– rovina je určena svými prvky (tři nekolineární body, přímka a bod neležící na této přímce, dvojice různoběžných přímek, dvojice různých rovnoběžných přímek)

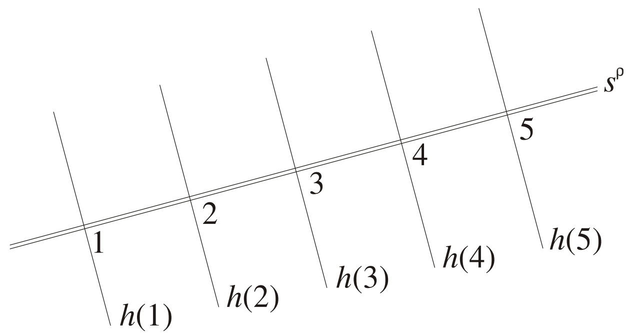
Stopa p_ρ roviny ρ
– průsečnice roviny ρ s průmětnou

Promítací rovina
– rovina kolmá k průmětně (tj. rovnoběžná se směrem promítání)

Hlavní přímka roviny
– přímka, která leží v rovině a je rovnoběžná s průmětnou

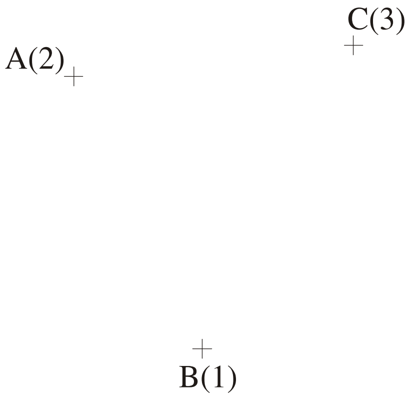
Spádová přímka roviny
– přímka, která leží v rovině a je kolmá na její hlavní přímky (má stejnou odchylku od průmětny jako rovina, ve které leží – tedy i stejný spád)

Spádové měřítko roviny
– vystupňovaná spádová přímka roviny



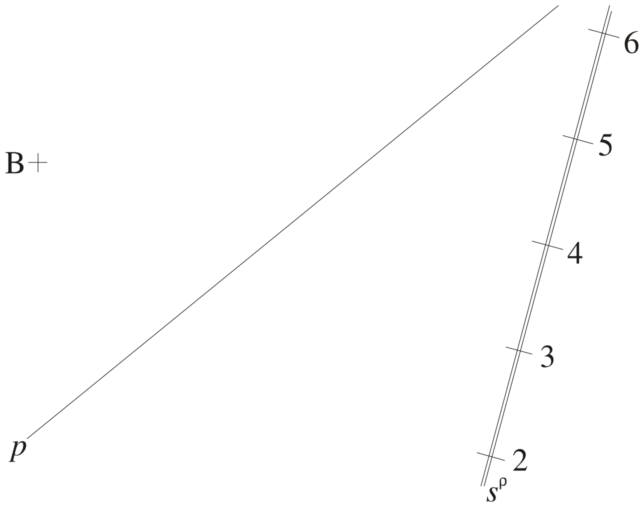
Úloha 5:

Určete spádové měřítko roviny $\rho = a\mathrm{A}$, $a = \mathrm{BC}$.



Úloha 6:

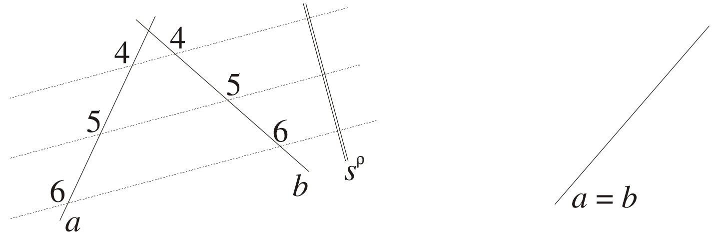
Určete kótu bodu B a vystupňujte přímku p, jestliže bod B a přímka p leží v rovině ρ, která je dána spádovým měřítkem.



Vzájemná poloha přímek

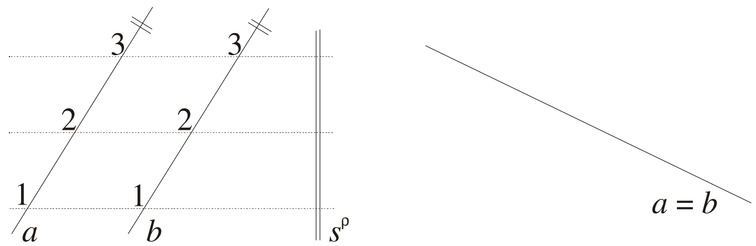
Různoběžné přímky

– dvě různoběžné přímky určují rovinu => přímky spojující body o stejných kótách jsou hlavní přímky této roviny (speciální případ – průměty přímek splývají – rovina jimi určená je kolmá k průmětně)



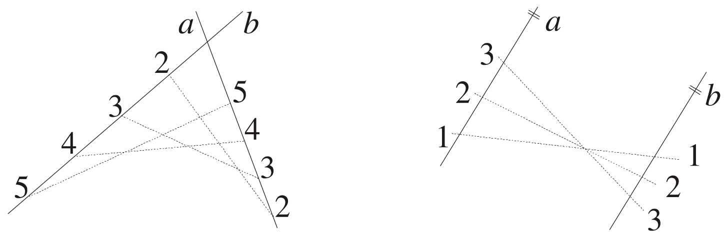
Rovnoběžné přímky

– situace je podobná jako u přímek různoběžných



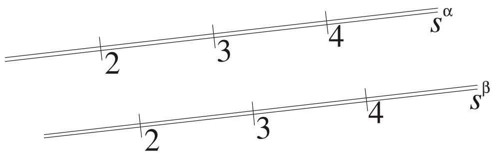
Mimoběžné přímky

– dvě mimoběžné přímky neurčují žádnou rovinu, proto ani přímky, které spojují body o stejných kótách, nejsou rovnoběžné (speciální případ – průměty přímek jsou rovnoběžné – všechny přímky spojující body o stejných kótách se protínají v jednom bodě)

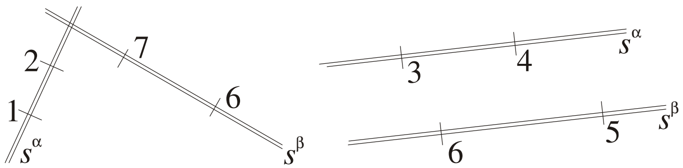


Vzájemná poloha rovin

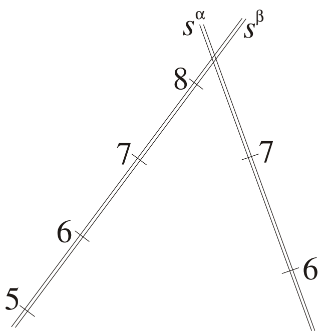
Rovnoběžné roviny
– rovnoběžná a shodná spádová měřítka (i smysl klesání)

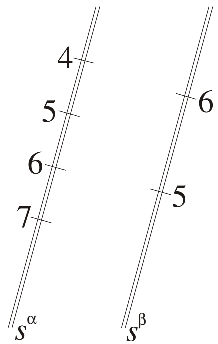


Různoběžné roviny
– různoběžná nebo rovnoběžná spádová měřítka



Úloha 7:
Najděte průsečnici rovin α a β určených
a) různoběžnými
b) rovnoběžnými
spádovými měřítky.

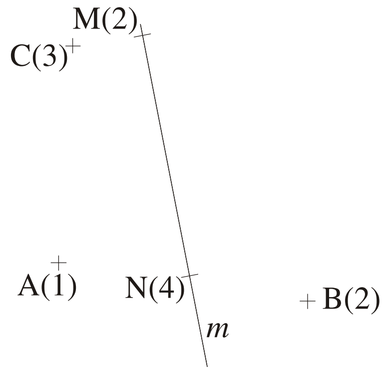




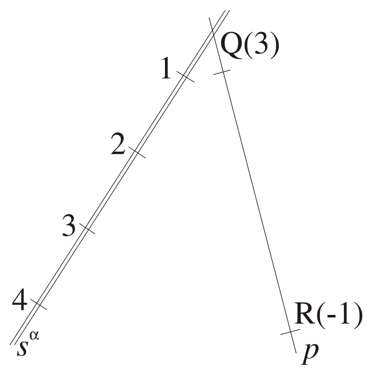
Vzájemná poloha přímky a roviny

Průsečík přímky *p* s rovinou ρ – **krycí přímka**
1. najdu krycí přímku *r* – leží v rovině ρ a zároveň platí, že její průmět je totožný s průmětem přímky *p*.
2. sklopím přímku *p* a přímku *r* a najdu jejich průsečík – ten je zároveň průsečíkem přímky *p* a roviny ρ.

Úloha 8:
Sestrojte průsečík přímky *m* = MN s rovinou ρ = ABC.

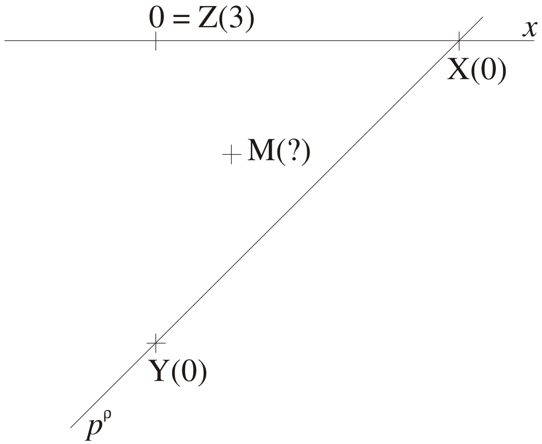


Úloha 9:
Sestrojte průsečík přímky *p* = QR s rovinou α určenou spádovým měřítkem.

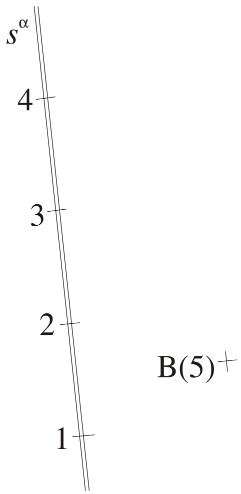


Přímka kolmá k rovině
– promítne se jako přímka kolmá k hlavním přímkám roviny

Úloha 10:
Je dána rovina ρ(4, 4, 3) . V bodě M[1, 1,5, ?] roviny ρ vztyčte kolmici k této rovině.

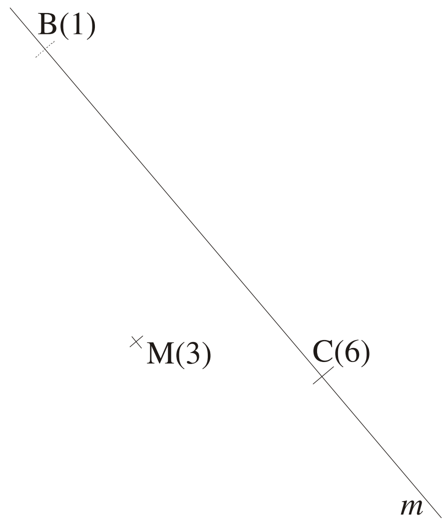


Úloha 11:
Určete vzdálenost bodu B od roviny α dané spádovým měřítkem s_α.



Rovina kolmá k přímce

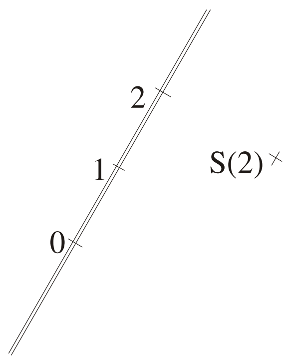
Úloha 12:
Bodem M proložte rovinu ρ kolmou k přímce *m* = BC.



Průmět kružnice

– průmětem kružnice je elipsa, ve speciálních případech jím může být úsečka nebo kružnice
– hlavní osa elipsy leží na hlavní přímce roviny (tam se zachová skutečný poloměr), vedlejší osu zkonstruujeme pomocí sklopení spádové přímky procházející středem

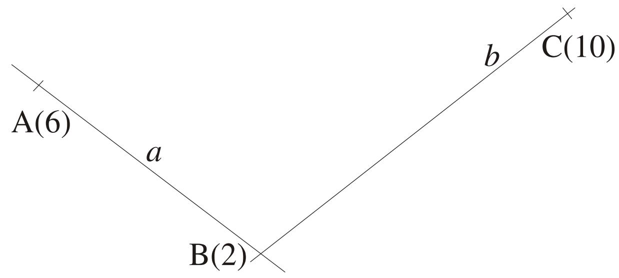
Úloha 13:
V rovině určené spádovým měřítkem zobrazte kružnici k se středem v bodě S a poloměrem r = 3,5.



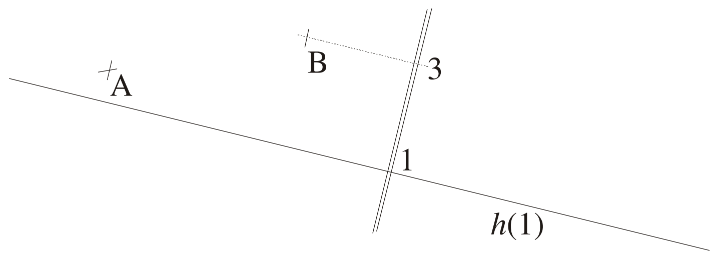
Otáčení roviny

– otáčíme bod roviny
– osa otáčení – hlavní přímka nebo stopa (speciální případ hlavní přímky)
– rovina otáčení – kolmá k ose otáčení a zároveň kolmá k průmětně
– střed otáčení S – průsečík osy otáčení s rovinou otáčení
– poloměr otáčení – |AS| (při otáčení bodu A)

Úloha 14:
Určete úhel přímek a = AB a b = BC.



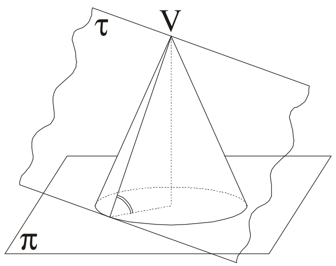
Úloha 15:
V rovině dané spádovým měřítkem sestrojte rovnostranný trojúhelník ABC, jsou-li dány body A a B, které náleží této rovině.



Rovina a přímka daného spádu

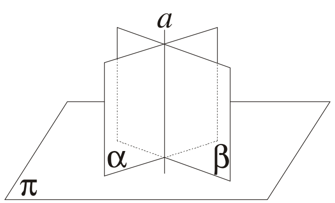
Spádová kuželová plocha
– je tvořena přímkami, které procházejí jedním bodem (vrcholem) a mají od průmětny stejnou odchylku (mají tedy i stejný spád)

Tečná rovina spádové kuželové plochy
– prochází vrcholem a má od průmětny stejnou odchylku jako površky spádové kuželové plochy

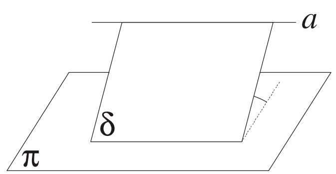


Rovina daného spádu procházející přímkou *a*
a) přímka *a* je kolmá k průmětně
– můžeme proložit jen roviny kolmé k průmětně
b) přímka *a* je rovnoběžná s průmětnou
– můžeme proložit roviny libovolného spádu

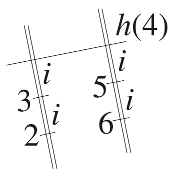
a)



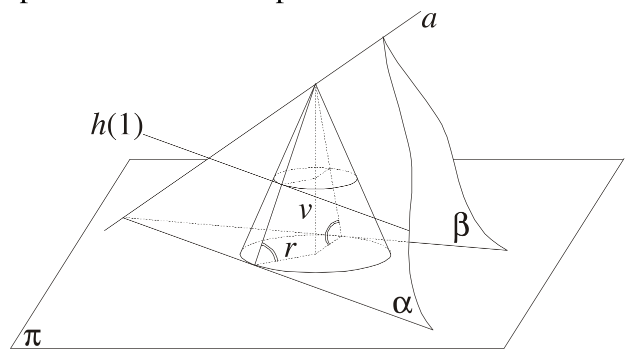
b)



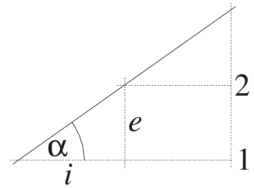
např. $s = 2$ =>
=> $i = 0{,}5$



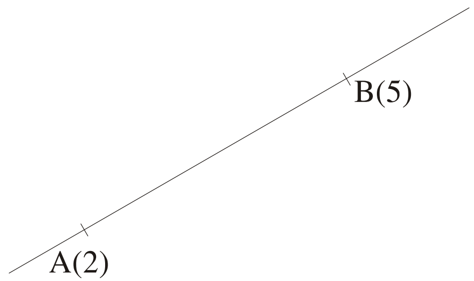
c) přímka *a* je v obecné poloze
– roviny daného spádu procházející jedním bodem obalují kuželovou plochu – jejich spádové přímky procházející tímto bodem tvoří spádovou kuželovou plochu



$s = v:r = e:i$
pokud $e = 1$,
potom $\boldsymbol{i = 1:s}$



Úloha 16:
Proložte přímkou a = AB roviny o spádu $s_\rho = 0{,}8$.
rovina: $s_\rho = 0{,}8 \Rightarrow i_\rho = 1{,}25$
přímka: $s_a = 0{,}75 \Rightarrow i_a = 1{,}33$ ... $s_a < s_\rho$

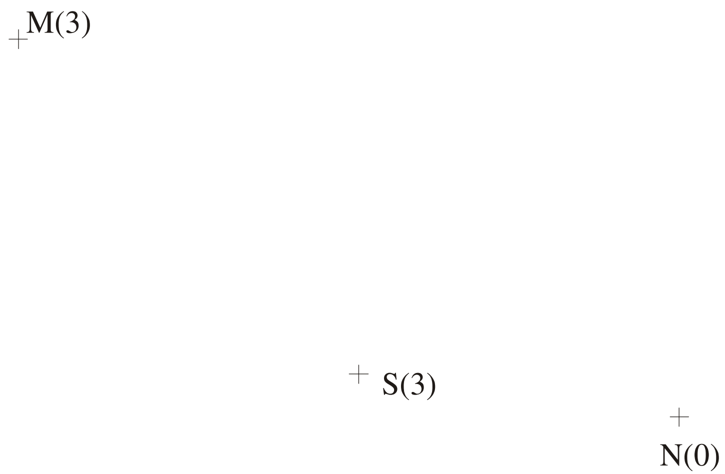


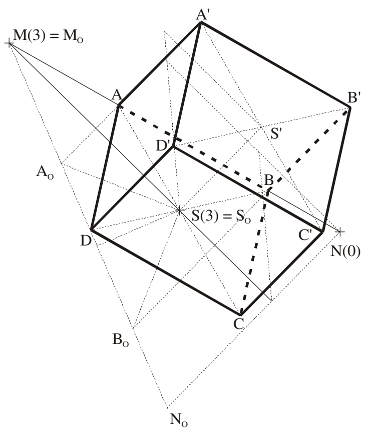
$s_a = s_\rho$ ($i_a = i_\rho$) => 1 řešení
$s_a < s_\rho$ ($i_a > i_\rho$) => 2 řešení
$s_a > s_\rho$ ($i_a < i_\rho$) => 0 řešení

Elementární tělesa

Úloha 17:

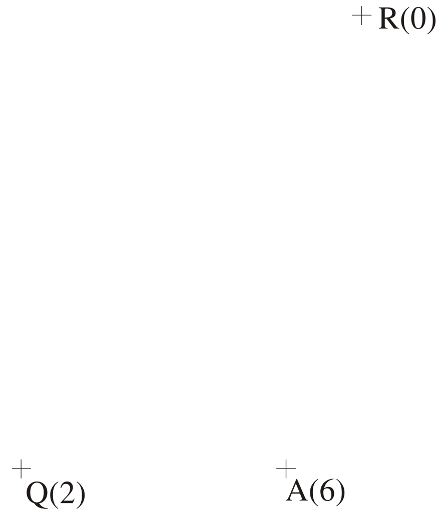
Sestrojte krychli, je-li dán střed S stěny ABCD a víme-li, že vrcholy A a B leží na přímce MN.

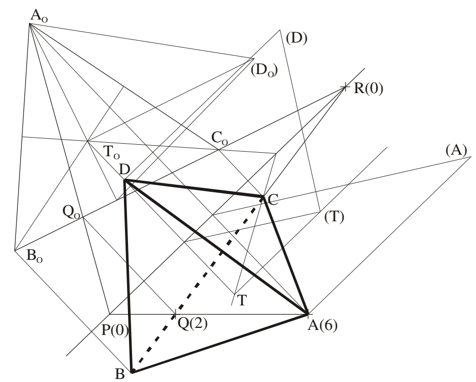




Úloha 18:

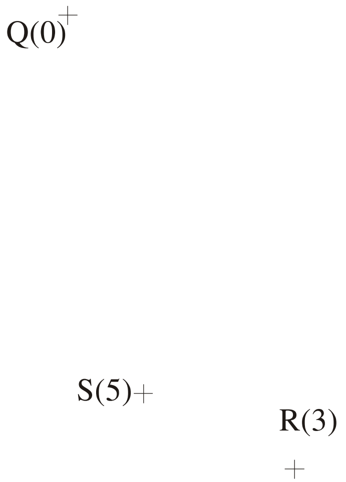
Sestrojte pravidelnýčtyřstěn, je-li dán jeho vrchol A a víme-li, že vrcholy B a C leží na přímce QR.

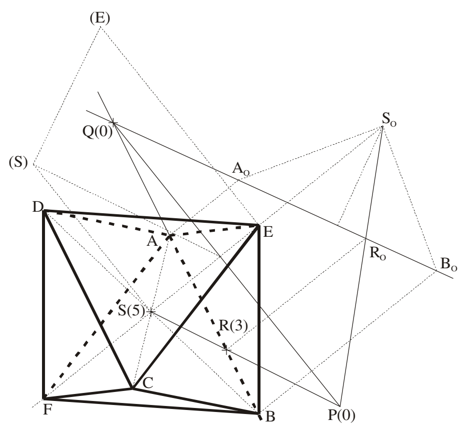




Úloha 19:

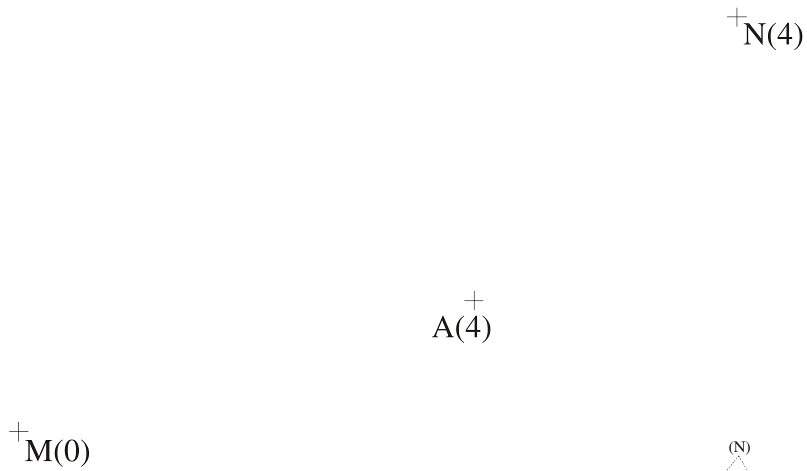
Sestrojte pravidelný osmistěn, je-li dán jeho střed S a víme-li, že vrcholy osmistěnu A a B leží na přímce QR.

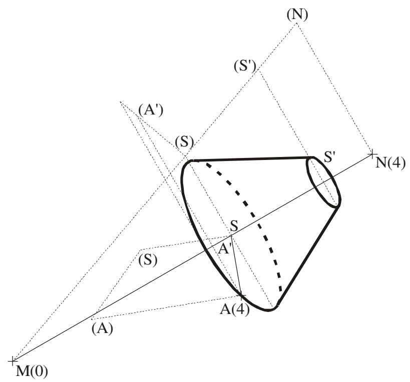




Úloha 20:

Sestrojte komolý kužel o výšce 3 cm , je-li dán jeho bod A ležící na hraně dolní podstavy a víme-li, že přímka MN je osou rotace kuželu. Poloměr horní podstavy se rovná třetině poloměru dolní podstavy.



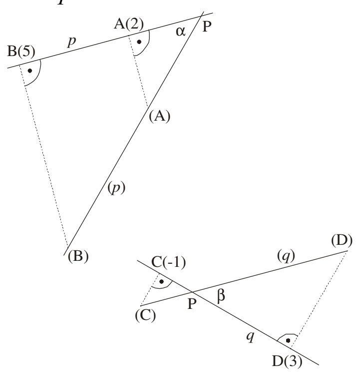


Řešení úloh

Úloha 1:

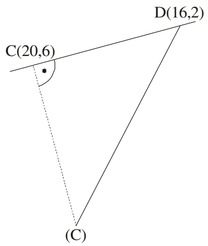
Řešíme pomocí sklápění. V bodech A a B vztyčíme kolmice k přímce *p*. Z bodu A naneseme na kolmici kótu bodu A a dostáváme sklopený bod (A). Tímto postupem zkonstruujeme i bod (B). Kóty obou bodů mají stejné znaménko, sklopené body tedy musí ležet ve stejné polorovině s hraniční přímkou *p*. Body (A) a (B) určují sklopenou přímku (*p*). Skutečná velikost úsečky AB je rovna velikosti úsečky (A)(B). Průnikem přímek *p* a (*p*) je hledaný stopník P, odchylka těchto přímek je rovna odchylce přímky *p* od průmětny.

V případě přímky *q* mají kóty bodů C, D různá znaménka, sklopené body tedy musí ležet v opačných polorovinách s hraniční přímkou *q*.



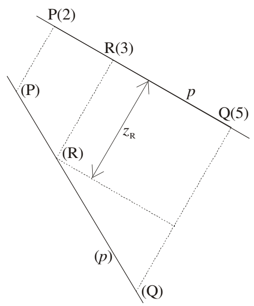
Úloha 2:

Řešíme obdobně jako úlohu 1. Představíme si pomocnou průmětnu π' – rovina o kótě z_D a sklopíme body C a D do této průmětny. Kóta bodu C vůči π' je rovna absolutní hodnotě rozdílu $z_C - z_D$, kóta bodu D je rovna nule. Na kolmici z bodu C tedy naneseme absolutní hodnotu rozdílu kót bodů C a D, dostaneme bod (C) a skutečná velikost úsečky CD je rovna velikosti úsečky (C)D.



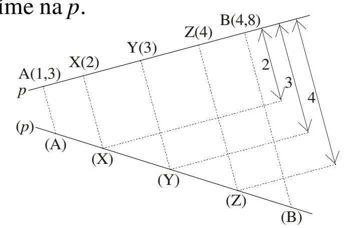
Úloha 3:

Řešíme opět pomocí sklápění. Sklopíme body P a Q a na přímce (*p*) najdeme bod, jehož vzdálenost od *p* je 3. To je bod (R). Z tohoto bodu spustíme kolmici na *p* a bod, ve kterém tato kolmice protne *p*, je hledaný bod R.



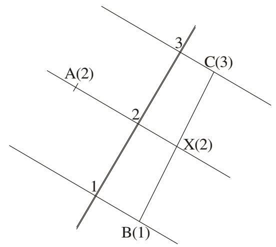
Úloha 4:

Řešíme obdobně jako úlohu 3. Na sklopené přímce (*p*) najdeme body, jejichž vzdálenost od *p* je 2, 3 a 4, a po kolmici je odvodíme na *p*.



Úloha 5:

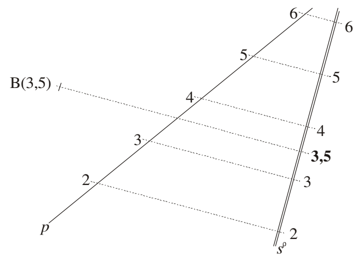
Nejprve určíme směr hlavních přímek roviny ρ. Například na přímce BC najdeme pomocí sklápění pomocný bod X o kótě 2. Tento bod spojíme s bodem A a dostáváme hlavní přímku roviny (o kótě 2). Nyní sestrojíme kolmici k hlavní přímce – to je spádová přímka – a vystupňujeme ji. Body s celočíselnými kótami získáme jako průsečíky spádové přímky a hlavních přímek s celočíselnými kótami.



Úloha 6:

Kótu bodu B určíme tak, že bodem vedeme hlavní přímku roviny ρ a na spádovém měřítku zjistíme kótu této hlavní přímky.

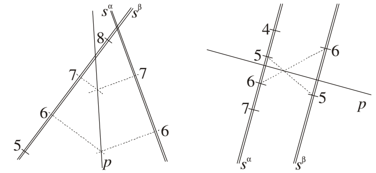
Přímku *p* vystupňujeme tak, že sestrojíme hlavní přímky s celočíselnými kótami a jejich průsečíky s *p* jsou hledané body s celočíselnými kótami.



Úloha 7:

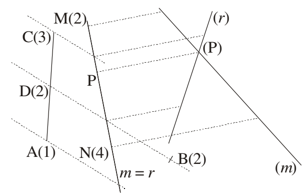
a) Sestrojíme hlavní přímky obou rovin a najdeme průsečíky hlavních přímek se stejnými kótami. Těmito body musí průsečnice procházet. Stačí najít dva takové průsečíky.

b) Průsečnicí je přímka, která je hlavní přímkou obou rovin. To znamená že je kolmá k oběma spádovým měřítkům a prochází body o stejných kótách. Sestrojíme spojnice bodů o stejných kótách. Průsečík těchto spojnic je střed stejnolehlosti, která zobrazuje jedno měřítko na druhé, a kolmice vedená tímto středem ke spádovým měřítkům je hledaná průsečnice.



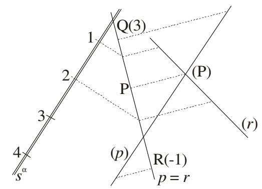
Úloha 8:

Průmět přímky *m* ztotožníme s průmětem krycí přímky *r*. Klasicky sklopíme přímku *m*. Abychom mohli sklopit přímku *r*, musíme alespoň u dvou bodů zjistit jejich kótu. Přímka *r* náleží rovině ρ, sestrojíme tedy dvě hlavní přímky roviny ρ (například na úsečce AC sestrojíme pomocný bod D o kótě 2, dále sestrojíme hlavní přímku o kótě 2 a s ní rovnoběžnou hlavní přímku o kótě 3). U průsečíků *r* s hlavními přímkami nyní známe kótu, sklopíme tedy *r* a získáme bod (P) jako průsečík (*m*) a (*r*). Ten odvodíme po kolmici na přímku *m* a získáme bod P, průsečík přímky *m* s rovinou ρ.



Úloha 9:

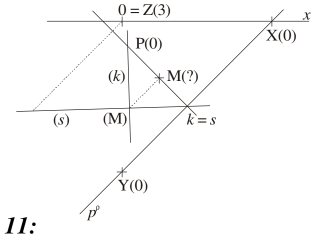
Postupujeme obdobně jako v úloze 8. Rozdíl je jen v určování kót bodů krycí přímky. Ty zjistíme postupem z úlohy 6 b) – stupňování přímky. Opět stačí určit kótu dvou bodů.



Úloha 10:

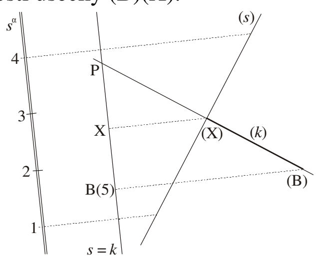
Průmět kolmice *k* k rovině ρ vedoucí bodem M je totožný s průmětem spádové přímky *s* roviny ρ procházející bodem M. Ještě je potřeba jednoznačně určit nějaký jiný bod kolmice *k*. Sklopíme spádovou přímku, najdeme na ní sklopený bod (M) a tímto bodem vedeme kolmici k (*s*) – získáme sklopenou přímku (*k*). Průsečíkem přímek *k* a (*k*) je stopník P přímky *k* – hledaný druhý bod přímky *k*.

Kóta bodu M je rovna velikosti úsečky M(M).



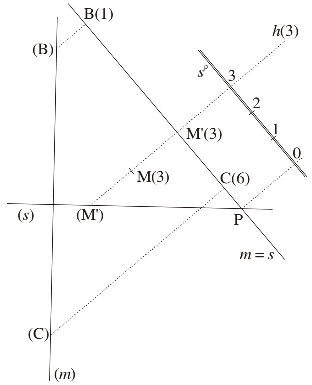
Úloha 11:

Abychom určili vzdálenost bodu B od roviny α, musíme tímto bodem vést kolmici k rovině, najít její průsečík s rovinou a zjistit vzdálenost průsečíku a bodu B. Průmět kolmice *k* je rovnoběžný se spádovým měřítkem a prochází bodem B. Zavedeme krycí spádovou přímku *s* roviny α, jejíž průmět je totožný s průmětem přímky *k*. Sklopíme přímku *s* a bod B. Sklopeným bodem (B) vedeme kolmici ke sklopené přímce (*s*) – získáme sklopenou přímku (*k*). Průnikem přímek (*k*) a (*s*) je bod (X) – sklopený průsečík přímky *k* a roviny α. Vzdálenost bodu B od roviny α je rovna velikosti úsečky (B)(X).



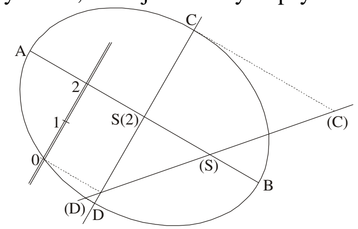
Úloha 12:

Najdeme bod M’, který leží na stejné hlavní přímce roviny ρ jako bod M a jeho průmět leží na průmětu přímky *m*. Určíme spádovou přímku *s* roviny ρ, jejíž průmět je totožný s průmětem přímky *m*. Sklopíme rovinu určenou přímkou *m* a bodem M’ a sestrojíme sklopenou spádovou přímku (*s*) – je kolmá na (*m*) a prochází bodem (M’). Najdeme stopník P přímky *s*. Nyní máme rovinu ρ určenou hlavní přímkou *h*(3) a bodem P, můžeme tedy zkonstruovat spádové měřítko roviny ρ.



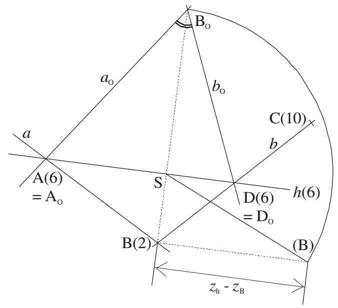
Úloha 13:

Bodem S vedeme hlavní přímku roviny a na ni na obě strany od bodu S naneseme 3,5. Získáme body A a B, hlavní vrcholy elipsy. Sklopíme spádovou přímku roviny procházející bodem S a na sklopenou přímku na obě strany od bodu (S) naneseme 3,5. Tím získáme body (C) a (D), když je po kolmici odvodíme na spádovou přímku, získáme body C a D, vedlejší vrcholy elipsy.



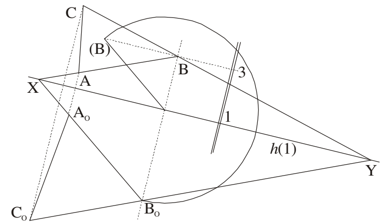
Úloha 14:

Abychom určili úhel přímek *a* a *b*, musíme rovinu, kterou přímky určují, otočit do polohy rovnoběžné s průmětnou. Budeme otáčet například okolo hlavní přímky *h*(6). Najdeme proto pomocný bod D o kótě 6 na přímce *b*. Průmět bodu A je totožný s průmětem otočeného bodu A_O, totéž platí pro průměty bodů D a D_O (protože body leží na ose otáčení). Musíme ještě otočit bod B. Sestrojíme bodem B kolmici ke hlavní přímce, na této kolmici bude ležet bod B_O. Průsečík této kolmice a přímky *h* je střed otáčení S. Bodem B dále vedeme rovnoběžku s přímkou *h* a naneseme na ni absolutní hodnotu rozdílu $z_h - z_B$. Tím získáme bod (B) – sklopený do roviny o kótě z_h. Velikost (B)S udává poloměr otáčení, ten naneseme z bodu S na přímku BS a získáme otočený bod B_O. Body A_O a B_O určují otočenou přímku a_O, body B_O a D_O určují otočenou přímku b_O a úhel těchto přímek je skutečná velikost úhlu přímek *a* a *b*.



Úloha 15:

Opět řešíme pomocí otáčení. Budeme otáčet například okolo přímky *h*(1). Pomocí postupu z minulé úlohy otočíme bod B, získáme bod B_O. Stejně bychom mohli otočit i bod A, ale práci nám ulehčí osová afinita. Najdeme průsečík X přímky AB s přímkou *h* a spojíme jej s bodem B_O. Vedeme z bodu A kolmici k hlavní přímce a najdeme její průsečík s přímkou B_OX – to je otočený bod A_O. Nad úsečkou A_OB_O sestrojíme rovnostranný trojúhelník $A_OB_OC_O$. Opět pomocí osové afinity otočíme zpět bod C_O. Sestrojíme průsečík Y přímky B_OC_O s přímkou *h* a spojíme jej s bodem B. Vedeme z bodu C_O kolmici k hlavní přímce a najdeme její průsečík s přímkou BY – to je bod C.



Úloha 16:

Nejprve vystupňujeme úsečku AB.

Roviny mají mít spád *s* = 0,8, *e* = 1 => *i* = 1,25. Sestrojíme kružnice se středem v bodě B a s poloměrem postupně 1,25, 2,50 a 3,75. Ty představují hladiny (vrstevnice) kužele s vrcholem v bodě B, jehož površky mají spád *s* = 0,8. Nyní vedeme z bodu A(2) tečny ke kružnici o kótě 2, z bodu 3 ke kružnici o kótě 3 atd. Tím sestrojíme hlavní přímky hledaných rovin a nakonec zkonstruujeme spádová měřítka hledaných rovin.